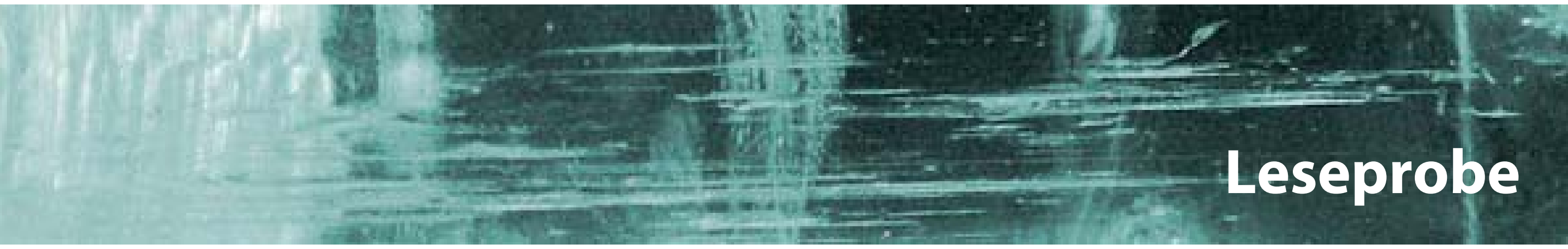

Schmidt

Dynamik

PHYSIK

Studienbrief 2-050-0502

3. Auflage 2007

HDL
HOCHSCHULVERBUND DISTANCE LEARNING

Verfasser: Prof. Dr.-Ing., Dipl.-Phys. Joachim **Schmidt**

Professor für Recycling
im Fachbereich Fahrzeug-, Produktions- und Verfahrenstechnik
im Institut für Recycling
an der Fachhochschule Braunschweig / Wolfenbüttel

Der Studienbrief wurde auf der Grundlage des Curriculums für das Studienfach „Physik“ verfasst. Die Bestätigung des Curriculums erfolgte durch den

Fachausschuss „Grundständiges Fernstudium Wirtschaftsingenieurwesen“,

dem Professoren der folgenden Fachhochschulen angehörten:

HS Anhalt, FHTW Berlin, TFH Berlin, HTWK Leipzig, HS Magdeburg-Stendal, HS Merseburg, HS Mittweida, FH Schmalkalden, FH Stralsund, TFH Wildau und WH Zwickau.

Redaktionsschluss: April 2007

3. aktualisierte Auflage 2007

Service-Agentur des HDL
(Hochschulverbund Distance Learning)
Leiter: Dr. Reinhard Wulfert
in der Agentur für wissenschaftliche Weiterbildung und Wissenstransfer e. V.
Magdeburger Straße 50, 14770 Brandenburg
Tel.: 03381 - 355 740 E-Mail: kontakt-hdl@aww-brandenburg.de
Fax: 03381 - 355 749 Internet: http://www.aww-brandenburg.de

Inhaltsverzeichnis

2.2 Kräfte und Kraftgesetze

Im Folgenden werden einige der wichtigsten Kraftgesetze dargestellt und in ihrer Wirkung erläutert.

2.2.1 Gewichtskraft

Im Beispiel 2.2 wurde bereits gesagt, dass die Gewichtskraft $\underline{G}$ eine zum Erdmittelpunkt hin gerichtete Kraft ist. Sie hat ihre Ursache in der Gravitationsbeschleunigung (Erdbeschleunigung) g, die durch das Kraftfeld (Gravitationsfeld) der Erde auf jede Masse wirkt. Die Tatsache, dass die Erdbeschleunigung auf jeden Körper eine Gewichtskraft ausübt, wird durch einen Spezialfall des dynamischen Grundgesetzes $\underline{F} = m \cdot \underline{a}$ beschrieben:

$$\underline{G} = m \cdot \underline{g}\ .$$

Die Gravitationsbeschleunigung kann in der Nähe der Erdoberfläche als konstant angenommen werden: $g \approx 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$. Beim Tragen einer Masse von 1 kg muss also ein Mensch eine betragsmäßig gleich große Gegenkraft $F = 1\ kg \cdot 9{,}81\ m \cdot s^{-2} \approx 10\ kg \cdot m \cdot s^{-2} = 10\ N$ durch seine Muskeln aufbringen.

Die Gewichtskraft ergibt sich als Spezialfall (Näherung) des Newtonschen Gravitationsgesetzes.

2.2.2 Gravitationskraft

NEWTON entdeckte, dass zwei beliebige Körper sich gegenseitig anziehen. Für die zwischen zwei Massen m_1 und m_2 wirkende anziehende Gravitationskraft gilt:

$$F_{12} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\ ,$$

wobei γ die aus Experimenten zu bestimmende Gravitationskonstante ($\gamma = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$) und r der Abstand zwischen den beiden Massen ist (bei kugelsymmetrischen Problemen wird für den Weg in der Physik häufig der Buchstabe r gewählt).

In Bild 2.2 sind die Richtungen der Kräfte etwas genauer veranschaulicht.

> Die von einem Körper 1 auf einen Körper 2 ausgeübte Gravitationskraft verläuft in ihrer Richtung von m_2 nach m_1, also auf die als Gravitationszentrum wirkende Masse m_1 zu. Das Reaktionsprinzip fordert, dass umgekehrt auch m_2 auf m_1 einwirkt, und zwar mit der Kraft $\underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12}$.

M

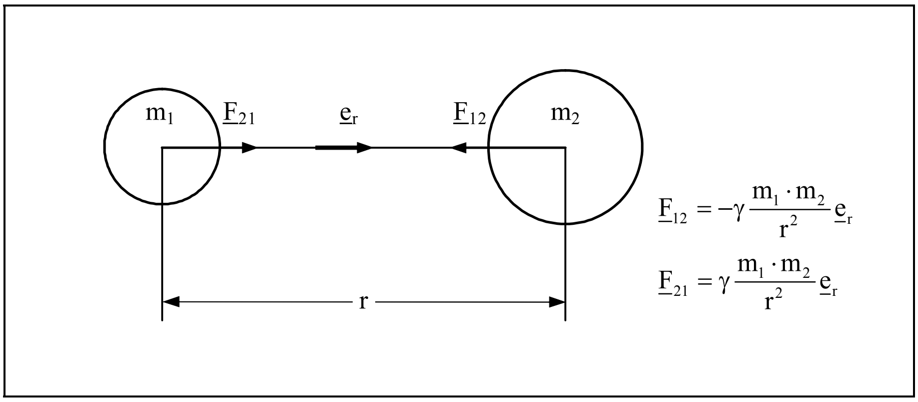

Bild 2.2 Gravitationskraft ($\underline{e}_r$: Einheitsvektor in radialer Richtung) und Newtonsches Gravitationsgesetz in Vektorschreibweise

Die Symmetrie der Gravitationskraft hinsichtlich der beiden schweren Massen m_1 und m_2 bringt zum Ausdruck, dass es gleichgültig ist, ob man sagt Körper 1 ziehe Körper 2 an oder umgekehrt.

Betrachtet man nun einen Körper $m_2 = m$, der sich in der Nähe der Erdoberfläche befindet (Erdradius r_E, Erdmasse m_E), so gilt:

$$F = G = \gamma \frac{m_E \cdot m}{r_E^2} = g \cdot m,$$

wobei die konstanten Größen $\gamma \frac{m_E}{r_E^2}$ als die Erdbeschleunigung zusammengefasst wurden und man damit den bereits bekannten Ausdruck für die Gewichtskraft erhält. Für kleine Entfernungen von der Erdoberfläche (Satellitenbahnen etc.) kann in guter Näherung mit einer konstanten Gravitationsbeschleunigung gerechnet werden.

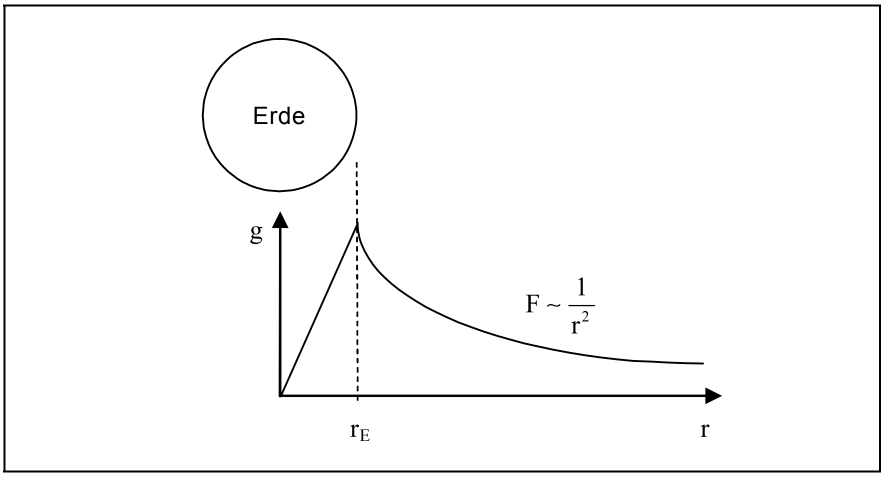

Bild 2.3 Gravitationsfeld der Erde (schematisch)

Mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz haben wir wegen $F \sim r^{-2}$ ein hyperbolisches Kraftgesetz kennen gelernt. Dieses Kraftgesetz, das beispielsweise auch für alle Planeten Gültigkeit hat, zeichnet sich dadurch aus, dass es selbst im Unendlichen nie Null wird. Hierdurch werden die verschiedenen Kraftwechselwirkungen der Planetensysteme im Weltraum möglich. In Bild 2.3 ist das Gravitationsfeld der Erde schematisch dargestellt. Im Erdinneren nimmt die Gravitationsbeschleunigung mit dem Abstand vom Erdmittelpunkt bis zu Oberfläche linear zu.

B 2.3 Der Mond hat einen Radius von r_M = 1.738 km, seine mittlere Dichte beträgt $\rho = 3{,}34\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Wie groß ist die Gewichtskraft G_M auf die Masse m = 1 kg auf der Mondoberfläche?

Für die Masse des Mondes gilt mit der Volumengleichung für eine Kugel:

$$m_M = \rho \cdot V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi \cdot r_M^3\right) = 7{,}34 \cdot 10^{22}\ \text{kg}\ .$$

Damit:

$$G_M = \gamma \frac{m_M \cdot m}{r_M^2} = 1{,}62\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 1{,}62\ \text{N}\ .$$

Da eine Masse von 1 kg auf der Erde mit einer Gewichtskraft von G = 9,81 N angezogen wird, ist ein Astronaut auf dem Mond nur ca.1/6 der irdischen Gewichtskraft ausgesetzt. Damit wird verständlich, warum sich ein Astronaut auf dem Mond trotz Schutzanzug so leichtfüßig bewegen kann.

2.2.3 Elastische Kraft (Federkraft)

Greift eine Kraft F am freien Ende einer einseitig befestigten Schraubenfeder an, so wird diese gedehnt oder gestaucht. Infolge des Wechselwirkungsgesetzes entsteht eine rücktreibende Federkraft $\underline{F}_F$ (Bild 2.4 a). Innerhalb gewisser Grenzen (keine plastische Verformung) gilt das Hookesche Gesetz ($\underline{e}_x$: Einheitsvektor in x-Richtung)

$$\underline{F}_F = -k \cdot x \cdot \underline{e}_x \quad \text{bzw. als Betragsgleichung} \quad F_F = k \cdot x.$$

Solange eine elastische (reversible) Verformung erfolgt, ist die Federkraft proportional zur Auslenkung (lineares Kraftgesetz). Die Federkonstante k mit der Einheit [k] = N/m ist vom Federmaterial und von den Konstruktionsdaten der Feder abhängig. Sie kann durch eine einfache Gewichtskraft-Verlängerungs-Messung bestimmt werden (Bild 2.4 b).

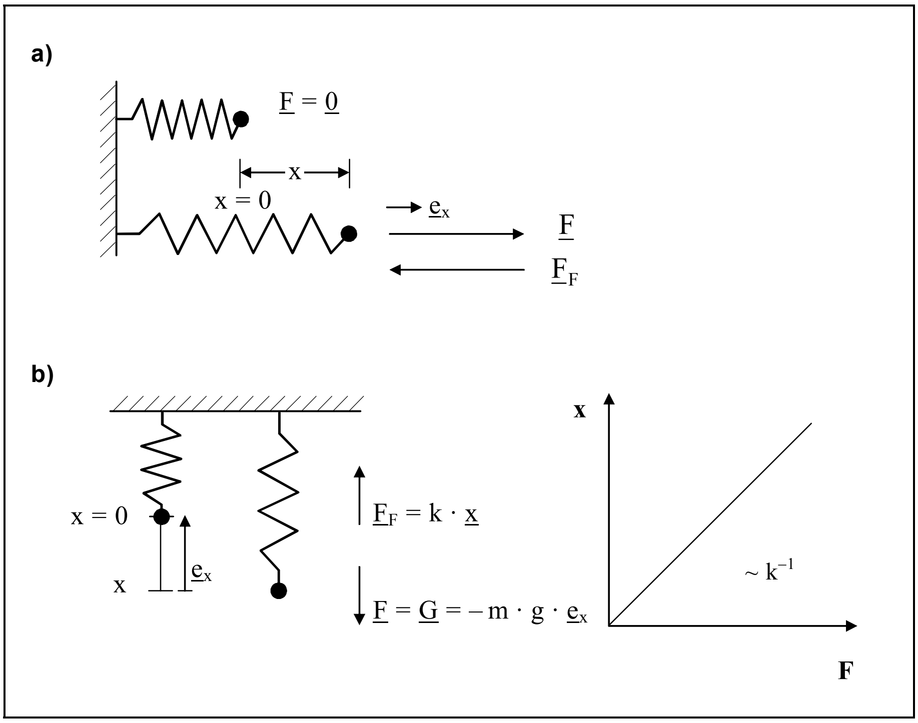

Bild 2.4 Federkraft
a) vektorielle Verhältnisse an einer Feder,
b) Bestimmung der Federkonstanten durch eine Kraft-Verlängerungs-Messung

Geeignet geeichte Federn werden als Kraftmesser (Federwaagen) eingesetzt. So kann mit Ihrer Hilfe die Gewichtskraft eines angehängten Körpers und, nach Division durch g, seine Masse bestimmt werden.

Bei einer Parallelschaltung von Federn addieren sich die einzelnen Federkonstanten:

$$k_{ges} = k_1 + k_2 + k_3 + ...$$

Bei der Reihenschaltung gilt:

$$\frac{1}{k_{ges}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + ...;$$

z. B. ergibt sich bei der Reihenschaltung von drei gleichen Federn die resultierende Federkonstante zu

$$\frac{1}{k_{ges}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{3}{k} \quad \text{bzw.} \quad k_{ges} = \frac{1}{3}k.$$

2.2.4 Trägheitskraft und d'Alembertsches Prinzip

Versucht man, einen Körper parallel zur Erdoberfläche durch eine Kraft $\underline{F} = m \cdot \underline{a}$ zu beschleunigen, so wirkt wegen dem Wechselwirkungsgesetz auch ohne Reibung eine gleich große Gegenkraft entgegen (Bild 2.5). Diese Kraft ist eine Folge der Trägheit des Körpers und wird daher anschaulich als Trägheitskraft F_t bezeichnet. Es gilt:

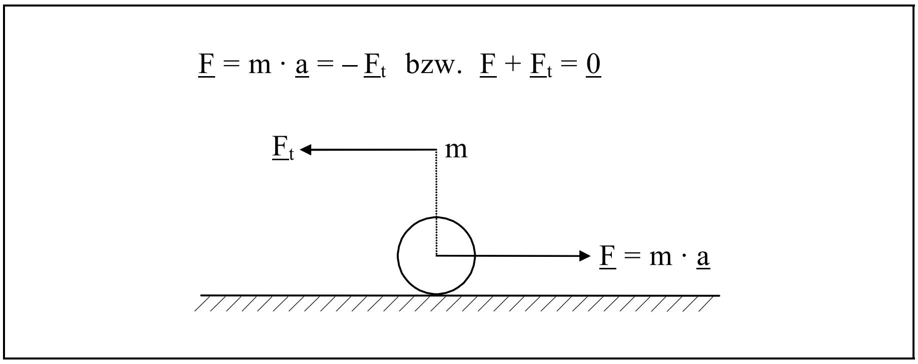

Bild 2.5 Veranschaulichung einer an einem Körper wirkende Kraft F und der dazugehörigen Trägheitskraft.

Die Formulierung $\underline{F} - m \cdot \underline{a} = \underline{F} + \underline{F}_t = \underline{0}$ bezeichnet man in der Literatur häufig als **d'Alembertsches Prinzip**. Es besagt, dass in einem beschleunigten System immer Trägheitskräfte auftreten, die sich mit den beschleunigenden Kräften zu Null addieren. Mit dieser Formulierung lassen sich dynamische Probleme (Bewegungsgleichungen) auf statische Kraftgleichgewichte zurückführen. Da die Trägheitskraft nur im mitbewegten Koordinatensystem, d. h. am beschleunigten Körper auftritt, wird sie als Scheinkraft bezeichnet.

2.2.5 Zentrifugal- und Zentripetalkraft

Bei der gleichförmigen Kreisbewegung tritt eine Beschleunigung auf, die für die Richtungsänderung der Tangentialgeschwindigkeit sorgt. Diese Radialbeschleunigung wirkt in Richtung des Drehzentrums und hat gemäß der dynamischen Grundgleichung eine Kraft (Zentripetalkraft) auf eine rotierende Masse zur Folge:

$\underline{F}_{ZP} = -\, m \cdot \underline{a}_r = -\, m \cdot \omega^2\, \underline{r}.$

Der nach innen gerichteten Zentripetalkraft wirkt gemäß dem Wechselwirkungsgesetz (bzw. dem d'Alembertschen Prinzip) eine Trägheitskraft entgegen, die als Zentrifugal- oder Fliehkraft F_{Zf} bezeichnet wird (Bild 2.6). Beide Kräfte sind dem Betrag nach gleich groß und es gilt:

$|\underline{F}_{ZP}| = |-\underline{F}_{Zf}| = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot \dot{v}_{tan}.$

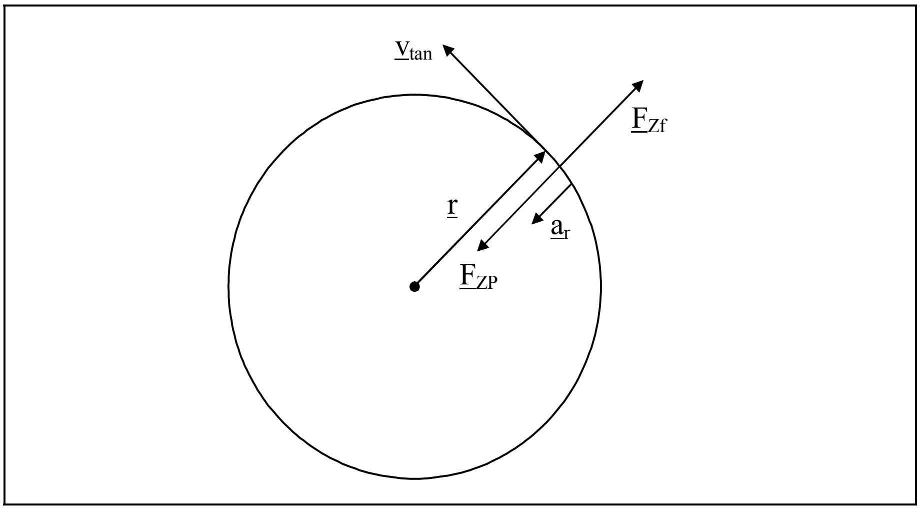

Bild 2.6 Kräfte bei der Rotationsbewegung

B

B 2.4 Ein Satellit der Masse m = 1.000 kg umkreist die Erde in einer Höhe von h = 500 km. Wie groß muss seine Tangentialgeschwindigkeit (Bahngeschwindigkeit) sein, damit er nicht zur Erde fällt?

Am Ort des Satelliten heben sich die Gravitationskraft und die Zentrifugalkraft auf (Bild 2.7).

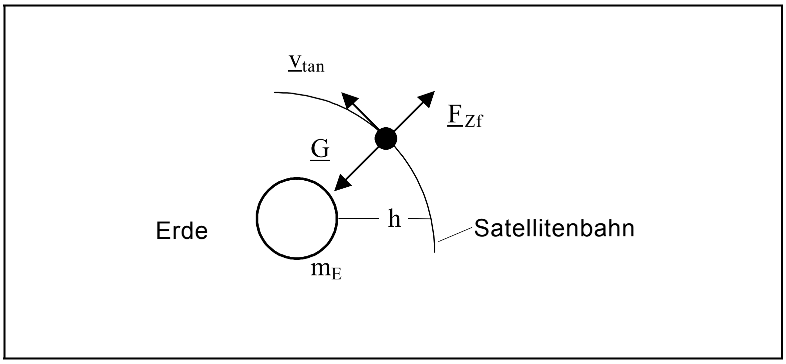

Bild 2.7 Kraftgleichgewicht auf einen Satelliten, der sich auf einer Kreisbahn um die Erde befindet.

Es gilt die Betragsgleichung

$$\gamma \frac{m_E \cdot m}{\left(r_E + h\right)^2} = m \frac{v_{tan}^2}{r + h}$$

$$v_{tan} = \sqrt{\gamma \frac{m_E}{r_E + h}} = 7{,}61 \cdot 10^3 \ \frac{m}{s}.$$

Wie man sieht, ist die Tangentialgeschwindigkeit unabhängig von der Masse des Satelliten.

2.2.6 Reibungskräfte

Äußere Reibung

Bei technischen Vorgängen sind Reibungskräfte von großer Bedeutung. Sie sind der bewegten Kraft immer entgegengerichtet. Bei festen Körpern muss zum Einleiten einer Bewegung eine relativ große Kraft aufgewendet werden. Diese ist zum Überwinden der **Haftreibung** notwendig. Der Körper gleitet dann unter Wirkung einer kleineren Kraft weiter, die zum Überwinden der **Gleitreibung** notwendig ist. Analog zur Gleitreibung tritt bei Rädern eine **Rollreibung** auf.

Alle drei Reibungsarten, die auch als äußere Reibung bezeichnet werden, gehorchen bei kleinen Geschwindigkeiten einer Gleichung der Form

$$F_R = \mu \cdot F_N.$$

Dabei ist F_R die der von außen wirkenden Kraft F entgegengesetzte Reibungskraft, F_N die Normalkraft senkrecht zur Auflage und μ die Reibungszahl (vgl. Bild 2.8).

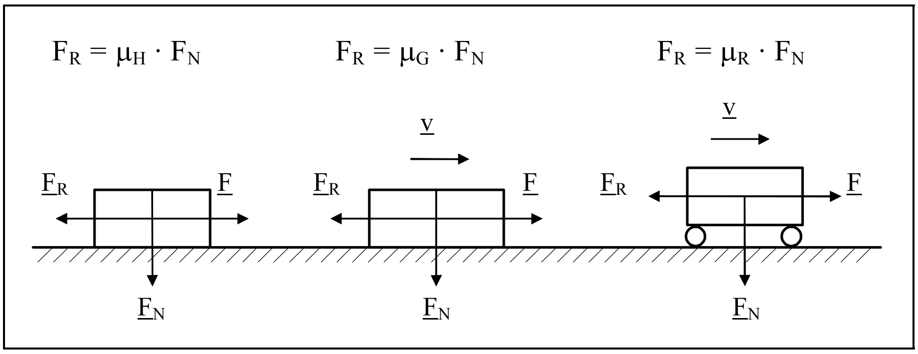

Bild 2.8 Haft-, Gleit- und Rollreibung

Die obigen Reibungskräfte sind unabhängig von der Geschwindigkeit und der Auflagefläche und nur abhängig von dem Reibungspaar. In Tabelle 2.1 sind einige Haft-, Gleit- und Rollreibungszahlen zusammengestellt.

Tabelle 2.1 Haft-, Gleit- und Rollreibungszahlen für einige Reibungspaare

Reibungspaar	μ_H	μ_G	μ_R
Gummi auf Asphalt	0,9	0,85	
Gummi auf Beton	0,65	0,5	
Gummi auf Eis	0,2	0,15	
Stahl auf Stahl	0,15	0,12	
Kfz auf Straße			0,02 – 0,05
Bahn auf Schiene			0,002

B

B 2.5 Der Haftreibungskoeffizient einer Festkörperpaarung kann u. a. mit Hilfe der schiefen Ebene ermittelt werden (Bild 2.9).

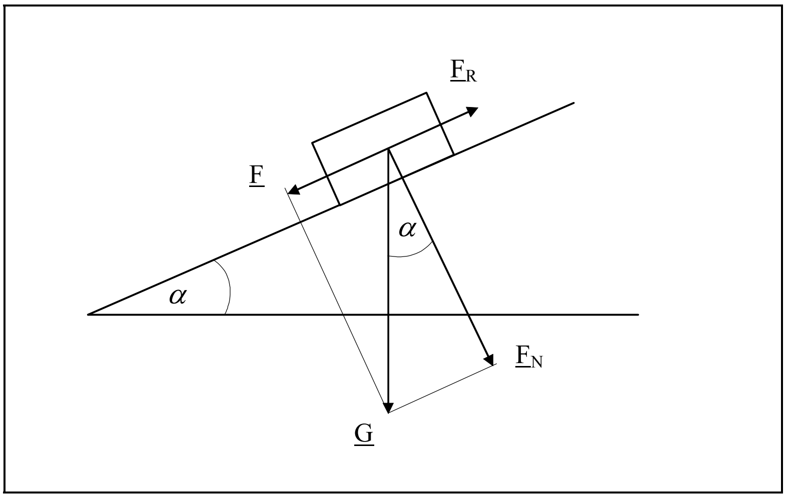

Bild 2.9 Kraftgleichgewicht mit Reibung an der schiefen Ebene

Zu Beginn der Reibung gilt:

$|\underline{F}| = |\underline{F}_R|$; $F_R = \mu \cdot F_N = \mu \cdot G \cdot \cos\alpha$; $F = G \cdot \sin\alpha$.

Damit

$G \cdot \sin\alpha = \mu \cdot G \cdot \cos\alpha$ bzw. $\mu = \tan\alpha = \text{konstant}$.

Aus der Neigung der Ebene zu Beginn der Bewegung kann also auf die Reibungszahl geschlossen werden.

Innere Reibung

Bewegt sich ein Körper durch eine Flüssigkeit oder ein Gas oder strömen diese Medien an einem ruhenden Körper vorbei, er erfährt dieser eine Widerstands- oder Reibungskraft. Sie hängt von der Relativgeschwindigkeit zwischen Körper und Medium ab. Grundsätzlich ist dabei zwischen laminarer und turbulenter Strömung zu unterscheiden (siehe Studienbrief SCHMIDT (2007c)).

Für die innere Reibung, wie sie vorzugsweise bei kleinen Relativgeschwindigkeiten auftritt (laminare Strömung), gilt:

$$\underline{F}_R = -\, b \cdot \underline{v} = -\, b \cdot \underline{\dot{x}}\ .$$

(Das Minuszeichen gibt an, dass die Reibungskraft der Geschwindigkeit entgegengerichtet ist.)

b wird als Zähigkeitskoeffizient bezeichnet. In ihn gehen Werte wie die Form des umströmten Körpers und die Viskosität η (Zähflüssigkeit) des Mediums ein. Für den Spezialfall der **Stokesschen Reibung** (eine Stahlkugel sinkt z. B. infolge der Gravitationskraft in einem Ölbehälter hinunter) gilt die Betragsgleichung:

$$F_R = 6\,\pi\,\eta \cdot r \cdot v,$$

wobei r der Radius der Kugel ist.

B 2.6 Eine Stahlkugel sinkt in einem zähen Medium (z. B. Tapetenkleister) mit kleiner Geschwindigkeit (laminar umströmt) hinunter. Wir wollen aus dem Kraftgleichgewicht das Weg-Zeit-Gesetz herleiten. Dabei wollen wir annehmen, dass sich eine Punktmasse mit konstanter Sinkgeschwindigkeit bewegt. Das bedeutet, dass sich ein Gleichgewicht zwischen der Reibungskraft $\underline{F}_R$ und der um den Auftrieb (siehe Studienbrief SCHMIDT (2007c)) verminderten Gewichtskraft $\underline{G}'$ des Körpers eingestellt hat (Beschleunigung ist Null). Bild 2.10 zeigt das einfache Kraftgleichgewicht.

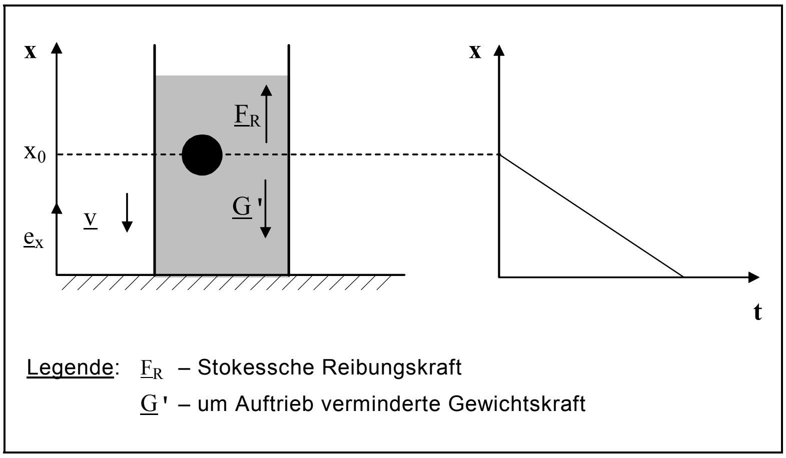

Bild 2.10 Kraftgleichgewicht (stationärer Zustand) beim Absinken einer Masse in einer Flüssigkeit und zugehöriges Weg-Zeit-Gesetz

Für das Kraftgleichgewicht gilt unter den vorgegebenen Randbedingungen:

$\underline{F}_R + \underline{G}' = \underline{0}$.

Der Vektor der Reibungskraft steht in Gegenrichtung zum Vektor der Sinkgeschwindigkeit:

$\underline{F}_R = -\,6\,\pi\,\eta \cdot r \cdot \underline{v}$.

Der Vektor der um den Auftrieb verminderten Gewichtskraft steht in Gegenrichtung zur nach oben gewählten Wegkoordinate x:

$\underline{G}' = -\,m \cdot g \cdot \underline{e}_x$.

Damit gilt für die x-Komponente des Kraftgleichgewichtes:

$$-\,6\pi\eta \cdot r \cdot v - m \cdot g = 0 \quad \text{bzw.} \quad v = \frac{d\,x}{d\,t} = -\frac{m \cdot g}{6\pi\eta \cdot r} .$$

Einmalige Integration des Geschwindigkeits-Zeit-Gesetzes (es gilt v = konstant) liefert

$$d\,x = -\frac{m \cdot g}{6\pi\eta \cdot r}\,d\,t\,;$$

$$\int d\,x = -\frac{m\,g}{6\pi\eta \cdot r}\int d\,t\,;$$

$$x(t) = -\frac{m \cdot g}{6\pi\eta \cdot r} \cdot t + c\,.$$

Die Integrationskonstante c wird durch die Anfangsbedingung $x\,(t = 0) = x_0$ festgelegt. Damit gilt:

$$x(t) = x_0 - \frac{m \cdot g \cdot t}{6\pi\eta \cdot r}.$$

Dieses ist eine linear abfallende Funktion mit dem Achsenabschnitt x_0 und dem Steigungsfaktor $-\frac{m \cdot g}{6\pi\eta \cdot r}$ (vgl. Bild 2.10). Prinzipiell kann hieraus die Viskosität des Mediums ermittelt werden, da alle anderen Größen im Steigungsfaktor bekannt sind. Nach einem vergleichbaren Verfahren arbeitet ein Kugelfallviskosimeter zur Bestimmung von Viskositäten. Hierauf werden wir in Studienbrief SCHMIDT (2007c) genauer eingehen.

Zu Beginn des in Beispiel 2.6 beschriebenen Bewegungsvorgangs tritt vor dem stationären Zustand eine beschleunigte Bewegung auf. Mit der zugehörigen, vergleichsweise komplizierten Bewegungsgleichung kann der so genannte Relaxationsprozess bis zum Erreichen des stationären Zustands berechnet werden.

Für die **Reibungskraft**, die bei **turbulenter Strömung** auftritt, wie sie in Gasen und bei großen Relativgeschwindigkeiten auch in Flüssigkeiten zu beobachten ist, gilt:

$$\underline{F}_R = -D \cdot \underline{v}^2 \cdot \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = -D \cdot \underline{\dot{x}}^2 \cdot \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

($\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$ – Einheitsvektor in Richtung von $\underline{v}$).

D wird häufig als Gasreibungskoeffizient bezeichnet und ist u. a. von der Dichte des Gases und der Form des Körpers abhängig:

$$F_R = c_W \cdot A \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2.$$

A ist dabei die Querschnittsfläche des Körpers senkrecht zur Strömungsrichtung und c_W der Widerstandsbeiwert, der als dimensionslose Zahl von der Form des umströmten Körpers abhängt. Typischerweise gilt (siehe Studienbrief SCHMIDT (2007c)) für Pkw: $c_W = 0{,}29 \ldots 0{,}5$ und für Lkw: $c_W = 0{,}6 \ldots 1{,}2$.

B

B 2.7 Ein Fallschirmspringer mit einer Körpermasse von 80 kg hängt an einem Fallschirm mit einer Fläche von 50 m^2 und einem Widerstandsbeiwert $c_W = 1{,}35$. Wir wollen aus dem Kraftgleichgewicht die Sinkgeschwindigkeit kurz vor der Landung ermitteln. Dabei wollen wir vom stationären Zustand (keine Trägheitskräfte) ausgehen. Das Kraftgleichgewicht ergibt sich durch Gleichsetzen der Beträge von Gewichtskraft und Reibungskraft (Strömungswiderstand):

$$m \cdot g = \frac{1}{2} c_W \cdot \rho \cdot A \cdot v^2, \quad \text{also } v = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{c_W \cdot \rho \cdot A}}\;.$$

Mit dem Wert ρ = 1,293 kg/m^3 für die Luftdichte an der Erdoberfläche ergibt sich eine Sinkgeschwindigkeit von $v = 4{,}24\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 15{,}3\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

2.3 Aufstellen und Lösen von Bewegungsgleichungen

Nach dem 2. Newtonschen Axiom wird eine Masse m beschleunigt, wenn auf sie eine Kraft $\underline{F}$ wirkt:

$$\underline{F} = m \cdot \underline{a} \quad , \quad \underline{F} - m \cdot \underline{a} = \underline{0} ,$$

oder allgemeiner

$$\sum_i \underline{F}_i - m \cdot \underline{a} = \underline{0}$$

Die am Körper angreifenden Kräfte $\underline{F}_i$ werden häufig als „äußere" Kräfte bezeichnet, um sie gegen die im Körper herrschenden Kräfte („innere" Kräfte, z. B. Bindungskräfte) abzugrenzen. Die äußeren Kräfte können dabei je nach betrachtetem System Federkräfte, Gewichtskräfte, Reibungskräfte usw. sein. Durch Einsetzen der speziellen Kraftgesetze in die obige Gleichung erhält man die Bewegungsgleichung („dynamisches" Kraftgleichgewicht) des physikalischen Systems.

Wenn keine Beschleunigung am Körper auftritt, befindet er sich im stationären Zustand, d. h. die Bewegung läuft nach dem 1. Newtonschen Axiom mit konstanter Geschwindigkeit ab. Diese Annahme haben wir bei den Beispielen B 2.6 und B 2.7 getroffen.

Für einen bewegten Körper gilt das **„dynamische" Kraftgleichgewicht**

$$\sum_i \underline{F}_i - m \cdot \underline{a} = \sum_i \underline{F}_i + \underline{F}_t = \underline{0} .$$

Die äußeren Kräfte $\underline{F}_i$ können dabei Federkräfte, Gewichtskräfte, Reibungskräfte usw. sein. Falls keine Beschleunigung am Körper auftritt ($m \cdot \underline{a} = \underline{0}$), befindet sich der Körper im stationären Zustand ($\underline{v}$ = $\underline{\text{konst}}$).

Der Term $\underline{F}_t = -m \cdot \underline{a}$ wird in der Literatur häufig als Trägheitskraft (Scheinkraft) bezeichnet. Sie tritt nur am beschleunigten Körper auf.

M

Ein Problem beim Aufstellen von Kraftgleichgewichten ist die Festlegung der Vorzeichen. Grundsätzlich gilt:

1. Die Trägheitskraft $\underline{F}_t$ ist gegen die beschleunigende Kraft, d. h. gegen den Beschleunigungsvektor $\underline{a}$ gerichtet:

   $\underline{F}_t = -m \cdot \underline{a} = -m \cdot \underline{\ddot{x}}$.

2. Reibungskräfte wirken entgegen der Bewegungsrichtung, d. h. entgegen dem Geschwindigkeitsvektor ($\underline{e}_v$: Einheitsvektor in Richtung von $\underline{v}$)

   $\underline{F}_R = -R\dfrac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = -R\underline{e}_v$ (konstante Reibungskraft),

   $\underline{F}_R = -\,b \cdot \underline{v} = -\,b \cdot \underline{\dot{x}}$ (Reibung bei laminarer Strömung),

   $\underline{F}_R = -\,D \cdot v^2 \cdot \dfrac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = -\,D \cdot \dot{x}^{\,2} \cdot \underline{e}_v$ (Reibung bei turbulenter Strömung).

   Federkräfte sind stets der Auslenkung $\underline{x}$ entgegengerichtet:

   $\underline{F}_F = -\,k \cdot \underline{x}$.

3. Mit diesem „Rezept“ wollen wir uns zunächst ein Beispiel anschauen, das in Studienbrief SCHMIDT (2007b) vertiefend behandelt wird.

B

B 2.8 Gegeben sei ein Federpendel (Feder-Masse-Schwinger) (Bild 2.11), das sich auf einer Unterlage unter Wirkung einer konstanten Reibungskraft $|\underline{F}_R| = |\underline{R}|$ bewegt. Die Feder mit der Federkonstanten k möge gleichermaßen auf Zug und auf Druck reagieren. In dem System wirken drei Kräfte, nämlich Trägheitskraft, Reibungskraft und Federkraft:

$\underline{F}_t + \underline{F}_R + \underline{F}_F = \underline{0}$.

Die Masse wird ein Stück x_0 aus der Ruhelage $x = 0$ herausgezogen und dann losgelassen.

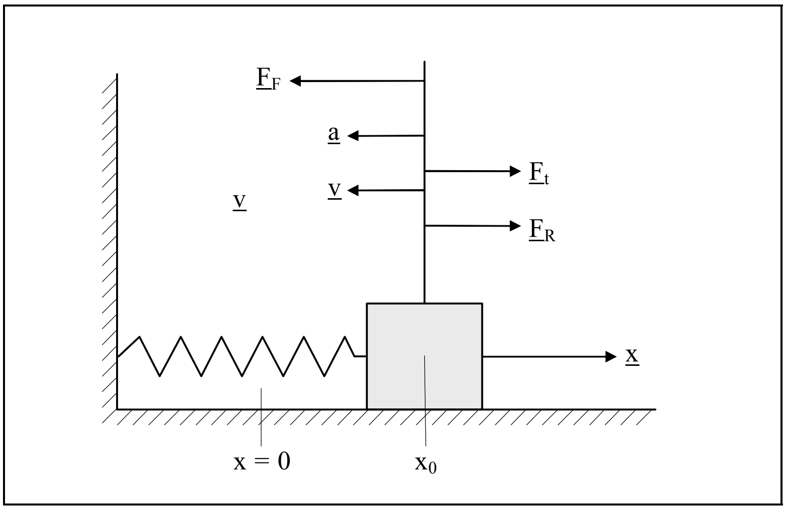

Bild 2.11 Feder-Masse-Schwinger

Dann wirken die Kräfte (vgl. Momentanbild für die Bewegung nach links in Bild 2.11)

$\underline{F}_t = -\,m \cdot \underline{\ddot{x}}$ (entgegen dem Beschleunigungsvektor $\underline{a}$),

$\underline{F}_R = -\,R \cdot \underline{e}_v$ (entgegen dem Geschwindigkeitsvektor $\underline{v}$),

$\underline{F} = -\,k \cdot \underline{x}$ (entgegen der Auslenkung $\underline{x}$).

Für das Kraftgleichgewicht gilt damit:

$-m \cdot \ddot{x} - R - k \cdot x = 0,$

$m \cdot \ddot{x} + R + k \cdot x = 0$

(Die Vektorstriche können, da es sich um eine eindimensionale Bewegung entlang der x-Achse handelt, weggelassen werden.).

Das Kraftgleichgewicht führt auf die Bewegungsgleichung des Systems. Es handelt sich dabei um eine Differentialgleichung 2. Ordnung, die häufig selbst schon bei einfachen Problemen nicht mehr exakt zu lösen ist.

Einfach zu lösen ist z. B. die Bewegungsgleichung für den freien Fall. Aus dem Kraftgleichgewicht $m \cdot \underline{\ddot{x}} = -m \cdot \underline{g}$ ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\underline{\ddot{x}} = -\underline{g} \ .$$

Diese führt, wie wir schon mehrfach gesehen haben, durch zweimaliges Integrieren auf das Weg-Zeit-Gesetz

$$x = -\frac{1}{2} g \cdot t^2$$

(mit den Anfangsbedingungen $x_0 = 0, \quad v_0 = 0$). Man beachte, dass der Vektor der Wegkoordinate in Gegenrichtung zum Vektor der Gravitationsbeschleunigung gewählt wurde.

Es soll nun zur Übung ein etwas komplizierteres Beispiel betrachtet werden.

B 2.9 Eine Kugel dringt mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 in ein zähes Medium ein. Dabei wird sie mit einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft (Stokessche Reibung) abgebremst (Bild 2.12). Wir wollen zeigen, dass der Abbremsvorgang (Weg-Zeit-Gesetz) mit einer Exponentialfunktion beschrieben werden kann.

B

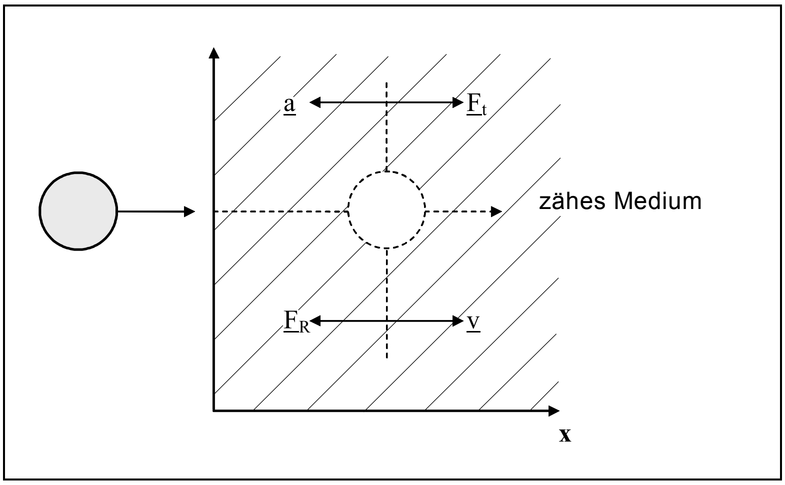

Bild 2.12 Kräfteverhältnisse beim Eindringen einer Kugel in ein zähes Medium. Dargestellt sind die vektoriellen Verhältnisse bei der Bewegung nach rechts. Die Gravitationskraft bleibt unberücksichtigt.

Auf die Kugel wirkt die Trägheitskraft Ft = – m · $\underline{a}$ (man beachte die Richtung von a, Abbremsvorgang) und die Reibungskraft $\underline{F}_R = -b \cdot \underline{\dot{x}}$.

Mit

$\underline{F}_t + \underline{F}_R = \underline{0}$

gilt (die Vektorstriche können weggelassen werden, eindimensionales Problem)

$-m \cdot \ddot{x} - b \cdot \dot{x} = 0 \quad , \quad m \cdot \ddot{x} = -b \cdot \dot{x}$.

Diese Differentialgleichung 2. Ordnung kann durch die Substitution $\dot{x} = v, \quad \ddot{x} = \dot{v}$ in eine Differentialgleichung 1. Ordnung überführt werden:

$m \cdot \dot{v} = -b \cdot v$

oder korrekter geschrieben

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -b \cdot v(t),$$

$$\frac{dv(t)}{v(t)} = -\frac{b}{m} dt .$$

Die Integration liefert auf der linken Seite wegen $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$:

$$\int \frac{dv(t)}{v(t)} = \ln v(t) + c_1$$

und auf der rechten Seite

$$\int -\frac{b}{m} dt = -\frac{b}{m} \int dt = -\frac{b}{m} \cdot t + c_2$$

und damit

$$\ln v(t) = -\frac{b}{m} \cdot t + c \qquad (c = c_2 - c_1),$$

$$e^{\ln v(t)} = v(t) = e^{-\frac{b}{m} \cdot t} \cdot e^c \qquad (e^{a+b} = e^a \cdot e^b).$$

Mit der Anfangsbedingung $v(t = 0) = v_0$ folgt

$$v_0 \; e^{-\frac{b}{m} \cdot 0} \cdot e^c = 1 \cdot e^c \quad , v_0 = e^c.$$

Damit lautet das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz des Bewegungsvorgangs:

$$v(t) = v_0 \; e^{-\frac{b}{m} \cdot t} .$$

Zur Ermittlung des Weg-Zeit-Gesetzes ist nochmaliges Integrieren erforderlich. Mit $v(t) = dx(t) / dt$ folgt

$$dx(t) = v_0 \cdot e^{-\frac{b}{m} \cdot t} dt,$$

$$\int dx(t) = x(t) + c_1 = \int v_0 \cdot e^{-\frac{b}{m} \cdot t} dt.$$

Die rechte Seite der Gleichung kann durch eine Substitution gelöst werden:

$$v_0 \int e^{-\frac{b}{m}} dt = -v_0 \frac{b}{m} \int e^z dz$$

$$\left(z = -\frac{b}{m} \cdot t, \frac{dz}{dt} = -\frac{b}{m}, dt = -\frac{b}{m} dz \right)$$

Lösen des Integrals ($\int e^x \, dx = e^x + c$) und Rücksubstitution liefert

$$x(t) + c_1 = -v_0 \cdot \frac{b}{m} \cdot e^{-\frac{b}{m} \cdot t} + c_{2,}$$

$$x(t) = -v_0 \frac{b}{m} \cdot e^{-\frac{b}{m} \cdot t} + c \qquad (c = c_2 - c_1).$$

Mit der Anfangsbedingung $x\,(t = 0) = 0$ folgt

$$0 = -v_0 \cdot \frac{b}{m} \cdot e^{-\frac{b}{m} \cdot 0} + c\,;$$

$$c = v_0 \frac{b}{m},$$

$$x(t) = -v_0 \cdot \frac{b}{m} \cdot e^{-\frac{b}{m} \cdot t} + v_0 \frac{b}{m},$$

$$x(t) = v_0 \frac{b}{m} \left(1 - e^{-\frac{b}{m} \cdot t} \right)$$

Für große Zeiten ($t \to \infty$) geht der Exponentialausdruck gegen Null und $x(t)$ gegen $v_0 \frac{b}{m}$ (maximale Eindringtiefe). In Bild 2.13 sind das v-t-Diagramm und das x-t-Diagramm des Bewegungsvorgangs dargestellt.

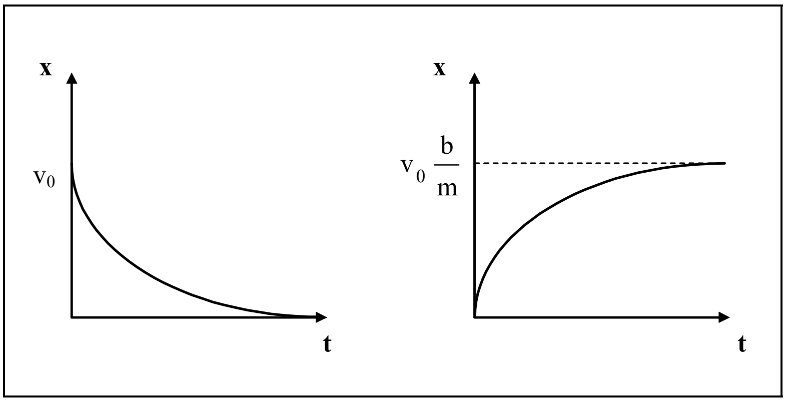

Bild 2.13 v-t-Diagramm und x-t-Diagramm für einen Abbremsvorgang in einem zähen Medium